INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES
À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1979. — Option MATHÉMATIQUES

TROISIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

Dans tout le problème, le corps de base est celui des nombres réels. Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy), les vecteurs unitaires des axes Ox, Oy sont notés respectivement $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

L'objet du problème est de construire la courbe (C) ensemble des points du plan dont les coordonnés (x, y) vérifient l'équation :

(1) $$x^2(x^2+y^2)+4x^2y-2x^3+3y^2-4y+1=0.$$

.../...

1° Ordonner l'équation (1) par rapport à y. En calculant le discriminant, montrer que l'abscisse x de tout point de (C) vérifie :

$$-1 \leqslant x \leqslant 1.$$

2° On pose $x = \sin\theta$, θ vérifiant $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Montrer que, sauf pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, il existe deux points distincts de (C) d'abscisse $\sin\theta$. Soient $\Phi(\theta)$ et $\Phi_1(\theta)$ les ordonnées de ces deux points, Φ et Φ_1 vérifiant, pour tout θ tel que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, l'inégalité :

$$\Phi(\theta) < \Phi_1(\theta).$$

Expliciter Φ et Φ_1 (on trouvera deux fonctions très simples).

3° Montrer qu'à condition de supposer que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}$ $\left(\text{au lieu de } -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, la représentation paramétrique :

$$x = \sin\theta\ ,\quad y = \Phi(\theta)\ ,$$

permet à elle seule de construire toute la courbe (C).

4° Montrer que (C) admet un axe de symétrie, que l'on précisera. En déduire qu'on peut construire (C) en supposant que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, à condition de compléter la figure obtenue par symétrie.

On suppose donc dans cette question que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Calculer $\Phi'(\theta)$ et étudier son signe, puis $m(\theta) = \frac{\Phi'(\theta)}{\cos\theta}$, et enfin $m'(\theta)$. Résoudre l'équation $m'(\theta) = 0$ et étudier le signe de $m'(\theta)$.

A l'aide des calculs précédents, construire (C). On précisera notamment le sens de concavité, les coordonnées du point de rebroussement A et celles du point d'inflexion I, les coefficients directeurs des tangentes de rebroussement et d'inflexion.

Indiquer sur un croquis l'allure de (C). On ne demande pas, dans cette question, de calculs décimaux approchés.

5° On suppose encore que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Calculer :

$$F(\theta) = \int_0^\theta \Phi(u)\cos u\, du.$$

6° On appelle :

— A celui des points de rebroussement de (C) dont l'abscisse est positive;

— A' celui des points de rebroussement de (C) dont l'abscisse est négative;

— B le point de coordonnées $\left(0, \frac{1}{3}\right)$;

— S_1 l'aire du domaine plan limité par le segment A'A et l'arc A'BA de (C);

— S_2 l'aire du domaine plan intérieur à la courbe (C).

L'unité d'aire est l'aire du carré dont les côtés sont les vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

A l'aide du résultat du 5°, calculer (c'est-à-dire exprimer à l'aide des symboles usuels) les nombres réels S_1 et S_2. Il n'est pas demandé ici de calcul décimal approché.

7° On appelle $R(\theta)$ $[R(\theta) \geqslant 0]$ le rayon de courbure de (C) paramétrée par θ. α désigne l'unique racine appartenant à $]0, \pi[$ de l'équation $m'(\theta) = 0$.

Calculer $R(\theta)$. Donner les valeurs de $R(O)$, $R(\pi)$; déterminer $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} R(\theta)$ et $\lim_{\theta \to \alpha} R(\theta)$.

8° On pose $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t$. Écrire la représentation paramétrique de (C) ainsi déduite de la représentation $x = \sin\theta$, $y = \Phi(\theta)$.

Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de (C) de paramètres respectifs t_1, t_2, t_3, t_4 soient alignés.

A l'aide des conditions précédentes, retrouver les coordonnées du point d'inflexion I d'abscisse positive.

Calculer ensuite les coordonnées du point J où la tangente en I à (C) recoupe (C). Préciser en outre le coefficient directeur de la tangente en J à (C).

9° Calculer les valeurs décimales approchées à 10^{-6} près par défaut :

— des coordonnées de I, notées (x_I, y_I), et du coefficient directeur de la tangente en I à (C), notée m_I ;

— des coordonnées de J, notées (x_J, y_J) et du coefficient directeur de la tangente en J à (C), notée m_J ;

— des réels S_1 et S_2.

10° Dessiner (C) soigneusement sur papier millimétré. Sur chacun des axes, l'unité de longueur sera de dix centimètres.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail